

## GEOMETRIJSKA PREDODŽBA EFEKTIVNE VRIJEDNOSTI

Hudek J.<sup>1</sup>, Šumiga I.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Veleučilište u Varaždinu, Varaždin, Hrvatska

**Sažetak:** Računanje efektivne vrijednosti izmjenične struje proizvoljnog oblika ponekad može biti dosta složeno. Kako se u elektrotehnici često pojavljuje trokutasti, pilasti ili trapezni oblik periodičke izmjenične veličine, moguće je efektivnu vrijednost i grafički predočiti.

**Ključne riječi:** efektivna vrijednost, volumen, funkcija

**Abstract:** Calculating the effective value of alternating current of arbitrary shape can sometimes be quite complicated. Since in electrotechnical engineering a triangle-shaped, saw-shaped or trapezium-shaped periodic alternating magnitude appears, the effective value can be presented graphically.

**Key words:** effective value, volume, function

### 1. UVOD

Ovaj članak u prvom dijelu prikazuje određivanje efektivne vrijednosti izmjenične struje čiji je oblik trokutasti, pilasti ili trapezni. Grafičkom predodžbom efektivne vrijednosti, moguće je do rezultata doći po znatno kraćem postupku nego klasičnim izračunavanjem prema definiciji.

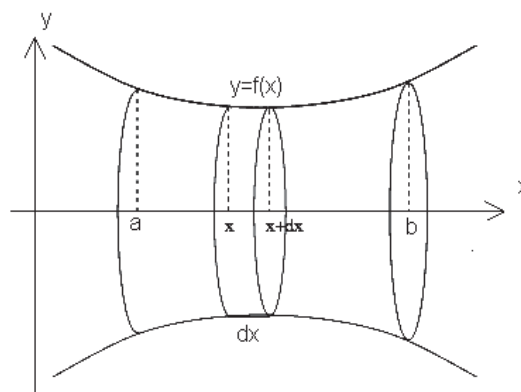
### 2. TEORETSKO OBRAZLOŽENJE

U matematici se diferencijalni element volumena rotacionog tijela piše kao:

$$dV = \pi \cdot f^2(x) \cdot dx \quad (1)$$

pa se volumen rotacionog tijela računa formulom: (slika 1.).

$$V = \pi \cdot \int_a^b y^2 \cdot dx \quad (2)$$



Slika 1. Izračun volumena rotacionog tijela

U elektrotehnici je efektivna vrijednost periodički promjenljive struje definirana kao:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt} \quad (3)$$

Ako jednakost kvadriramo slijedi:

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt \quad (4)$$

i dalje

$$I_{ef}^2 \cdot T = \int_0^T i^2 dt \quad (5)$$

Ako se jednačba pomnoži s  $\pi \cdot k$  slijedi izraz:

$$I_{ef}^2 \cdot T \cdot \pi \cdot k = \pi \cdot k \cdot \int_0^T i^2 dt \quad (6)$$

gdje konstanta  $k$  ima jedinicu  $k(\frac{m^3}{A^2 \cdot s})$ . Uspoređujući jednačbe (2) i (6) uočava se da desna strana jednačbe (6) predstavlja volumen tijela koje nastaje rotacijom funkcije  $i(t)$  oko osi  $t$ . Lijeva strana jednačbe (6) je volumen valjka, gdje je  $I_{ef}$  polumjer baze dotičnog valjka, a  $T$  visina valjka. Ako je funkcija  $i(t)$  kod trokutastog, pilastog, trapezastog ili pravokutnog oblika rotacijom „likova“ koje omeđuje dotična funkcija s vremenskom osi oko osi  $t$ , nastaju tijela čije je

računanje volumena poznato iz stereometrije (volumen stošca, volumen krnjeg stošca ili valjak).

Izraz (6) pišemo kao:

$$I_{ef}^2 \cdot T \cdot \pi = \pi \cdot \int_0^T i^2 dt \quad (7)$$

gdje je izraz na lijevoj strani „volumen valjka“, a izraz na desnoj strani „volumen tijela“ nastalog rotacijom „lika“ funkcije  $i(t)$  oko  $t$  osi.

$$I_{ef}^2 \cdot T \cdot \pi = V_{rot} \quad (8)$$

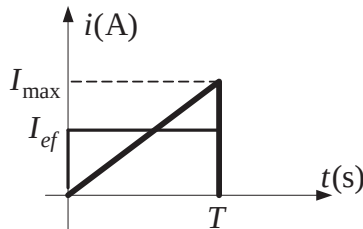
$$I_{ef}^2 = \frac{V_{rot}}{T \cdot \pi} \quad (9)$$

Za primjer neka je

$$i = \frac{I_{max}}{T} \cdot t \quad (10)$$

(pilasti oblik struje) čija se efektivna vrijednost izračuna kao u primjeru 1.

### Primjer 1.



Slika 2. Pilasti oblik struje

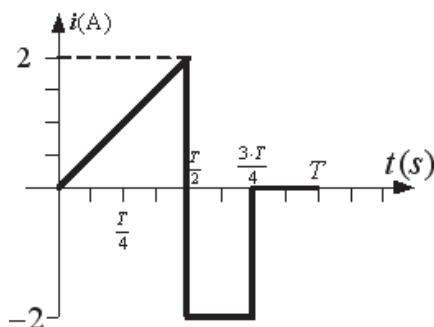
$$I_{ef}^2 = \frac{V_{rot}}{\pi \cdot T} = \frac{1}{\pi \cdot T} \cdot \frac{1}{3} \cdot I_{max}^2 \cdot \pi \cdot T = \frac{I_{max}^2}{3} \quad (11)$$

$$I_{ef} = \frac{I_{max}}{\sqrt{3}} \quad (12)$$

### Primjer 2.

Ovaj način računanja efektivne vrijednosti ima prednost pred „klasičnim načinom“ ako je signal složen kao u sljedećem primjeru.

Treba izračunati efektivnu vrijednost struje čija je vremenska promjena prikazana na slici 3.



Slika 3. Vremenska promjena struje uz primjer 2.

Rješenje: Na intervalu  $0 < t < \frac{T}{2}$  struja se mijenja prema

$$i = k \cdot t, \text{ gdje je } k = \frac{2}{\frac{T}{2}} = \frac{4}{T} \text{ pa je: } i = \frac{4}{T} \cdot t; \quad i^2 = \frac{16}{T^2} \cdot t^2$$

Na intervalu  $\frac{T}{2} < t < T$  vrijedi da je  $i = -2$ .

Prema definiciji efektivna vrijednost struje je:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt} \text{ ili } I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt$$

Za naš slučaj vrijedi:

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{T/2} \frac{16}{T^2} \cdot t^2 dt + \int_{T/2}^T 4 \cdot dt + \int_{3T/4}^T 0 \cdot dt \right]$$

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \cdot \left[ \left( \frac{16}{T^2} \cdot \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{T/2} + (4 \cdot t) \Big|_{T/2}^T + 0 \right]$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \frac{16}{T^2} \cdot \frac{T^3}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{T} \cdot 4 \cdot \frac{T}{4} =$$

$$\frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \text{ A}^2$$

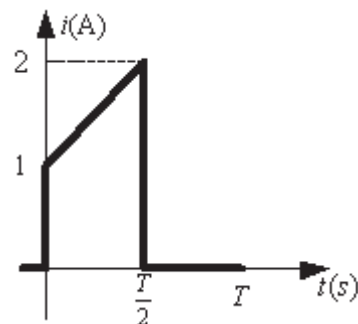
$$I_{ef} = \sqrt{\frac{5}{3}} \text{ A}$$

Skraćenim postupkom zadatak se može riješiti i ovako:

$$\frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \frac{T}{2} + 2^2 \cdot \left( \frac{3T}{4} - \frac{2 \cdot T}{4} \right) + 0 = I_{ef}^2 \cdot T$$

$$I_{ef}^2 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \text{ A}^2; \quad I_{ef} = \sqrt{\frac{5}{3}} \text{ A}$$

### Primjer 3.



Slika 4. Vremenska promjena struje uz primjer 3.

Rješenje:

$$i = \frac{2-1}{\frac{T}{2}} \cdot t + 1 = \frac{2}{T} \cdot t + 1; \quad i^2 = \frac{4}{T^2} \cdot t^2 + \frac{4}{T} \cdot t + 1$$

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^{T/2} i^2 dt = \frac{1}{T} \cdot \left( \frac{4}{T^2} \cdot \frac{T^3}{8} + \frac{4}{T} \cdot \frac{T^2}{2} + \frac{T}{2} \right) = \frac{7}{6}$$

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{7}{6}} \text{ A}$$

Provjera :

U x,y ravnini rotacijom zadanog lika oko x osi nastaje krnji stožac, čiji se volumen izračuna iz

$$V = \frac{v \cdot \pi}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2), \text{ gdje je } v \text{ visina}$$

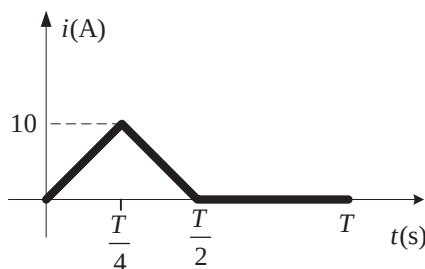
krnjeg stošca, a  $r_1$  i  $r_2$  su polumjeri osnovica.

Zato vrijedi da je:

$$I_{ef}^2 \cdot T = \frac{1}{3} \cdot \frac{T}{2} \cdot (2^2 + 2 \cdot 1 + 1^2) = \frac{7 \cdot T}{6}, \text{ pa je: } I_{ef} = \sqrt{\frac{7}{6}} \text{ A}$$

#### Primjer 4.

Treba izračunati kolika je efektivna vrijednost struje čija je vremenska promjena prikazana na slici 5.



Slika 5. Vremenska promjena struje uz primjer 4.

$$I_{ef}^2 \cdot T = \frac{V_{rot}}{\pi}.$$

$$V_{rot} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot \pi \cdot \frac{T}{4} = \frac{200 \cdot \pi}{3} \cdot \frac{T}{4}, \text{ pa je:}$$

$$I_{ef}^2 \cdot T = \frac{200}{12} = \frac{100}{6}; \quad I_{ef} = \frac{10}{\sqrt{6}}$$

Računanje efektivnih vrijednosti na ovaj način ima smisla samo ako se pri tome pojavljuju „volumeni“, čije izračunavanje ne predstavlja dugotrajni postupak jer su opće poznati.

Općenito za bilo koju funkciju možemo u nekom jednostavnom programu prikazati graf kvadrata te funkcije.

Prema definiciji efektivne vrijednosti slijedi da je

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt \quad (13)$$

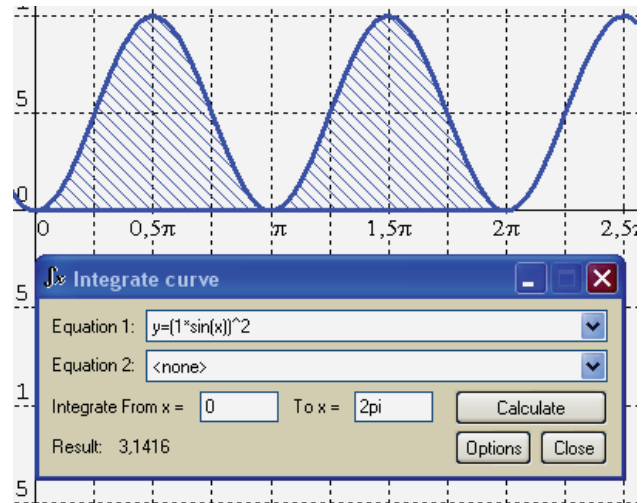
gdje je  $\int_0^{2\pi} i^2 dt$  „površina“ ispod krivulje na intervalu

jedne periode. Zato vrijedi da je  $I_{ef}^2 \cdot T = P$  i dalje

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{P}{T}}.$$

#### Primjer 5.

Potrebno je izračunati efektivnu vrijednost sinusoidalne struje  $i = 1 \cdot \sin(\omega t) = 1 \cdot \sin(\alpha)$



Slika 6. Vremenska promjena struje uz primjer 5.

„Površina“ ispod krivulje  $i^2$  iznosi  $P = 3,1416 = \pi$

$$\text{pa je } I_{ef} = \sqrt{\frac{\pi}{2\pi}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

#### Primjer 6.

Kolika je efektivna vrijednost nesinusoidalne struje koja je dana izrazom:

$$i = 10 \cdot \sin(x) + 3 \cdot \sin(3x)$$

Graf (slika 7.) prikazuje funkciju  $i^2$ .

Površina ispod krivulje je  $P = 342,4336$  pa je

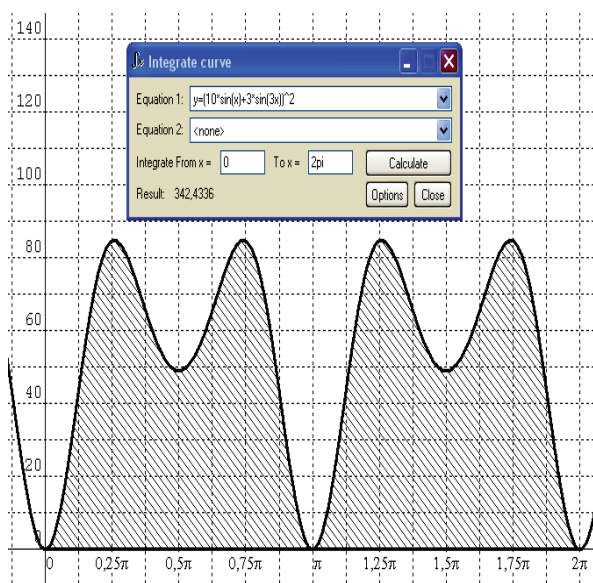
$$I_{ef}^2 = \frac{P}{2\pi} = \frac{342,4336}{2\pi} = 54,500,$$

što znači da je

$$I_{ef} = \sqrt{54,500} = 7,382 \text{ A}$$

Rezultat možemo provjeriti poznatom relacijom da je

$$I_{ef} = \sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{50 + 4,5} = 7,3824 \text{ A}$$



Slika 7. Vremenska promjena struje uz primjer 6.

Za crtanje i izračunavanje površine ispod kvadrata funkcije korišten je program Graphmatica.

Kao što je pokazano u primjeru 5., mogu se na taj način određivati efektivne vrijednosti izmjeničnih struja u jednofrekventnom i višefrekventnom sustavu.

### 3. ZAKLJUČAK

Računanje efektivnih vrijednosti periodičkih izmjeničnih veličina može biti dugotrajan i složen postupak. No grafičkom predodžbom efektivne vrijednosti, do rezultata se može doći u znatno kraćem vremenu, naročito ako se kod računanja pojavljuju „volumeni“ kao što su stožac, krnji stožac ili valjak, čiji su izrazi za volumen opće poznati. Za određivanje efektivne vrijednosti može poslužiti bilo koji program koji može crtati grafove zadanih funkcija te može dati prikaz površine ispod zadane funkcije. U ovom članku korišten je besplatan program Graphmatica koji je dostupan na internetu.

### 4. LITERATURA

- [1] Kuzmanović, B., "Osnove elektrotehnike II", Element, Zagreb, 2004.
- [2] Pinter, V., "Osnove elektrotehnike II", Tehnička knjiga, Zagreb, 1994.
- [3] Matematički program „Graphmatica”
- [4] Bronstein-Matematički priručnik

Kontakt:

Josip Huđek, dipl. ing.  
Križanićeva bb, 42000 Varaždin  
Tel: 099/317 3218  
e-mail: [josip.hudjek@velv.hr](mailto:josip.hudjek@velv.hr)

Ivan Šumiga, mr. sc.  
Križanićeva bb, 42220 Varaždin, Hrvatska  
e-mail: [ivan.sumiga@velv.hr](mailto:ivan.sumiga@velv.hr)